M. Ancona 22/10/21

Définition de la propriété d'approximation fine et conséquences

Notations : B courbe projective lisse connexe sur $\mathbb{R}$, i.e. Deux pts de vue

- $B \longrightarrow Spec(\mathbb{R})$
- $B(\mathbb{C})$ = pts cx
- $B(\mathbb{R})$ = pts réels

|

- $B(\mathbb{C})$ = surf. de Riemann compact

$\sigma : B(\mathbb{C}) \to B(\mathbb{C})$ involution anti-holom.

$$G = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \langle \sigma \rangle$$

$f : \mathcal{X} \longrightarrow B$ famille lorsque :

- $\mathcal{X}$ régulière $\rightsquigarrow$ var. alg réelle lisse (différentiel)
- f $\underbrace{\text{propre}}_{\text{fibre compact}}$ et $\underbrace{\text{plat}}_{\text{fibres même dim} \Rightarrow \text{même invariants}}$

Equivalentement : $f : (\mathcal{X}(\mathbb{C}), \sigma_*) \longrightarrow (B(\mathbb{C}), \sigma_B)$ et f commute avec les deux structure réelles

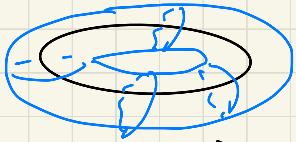
Exemple : $X/\mathbb{R}$ $\quad f : X \times B \longrightarrow B$

Déf : $f : \mathcal{X} \longrightarrow B$ famille satisfait satisfait TIGHT
la propriété d'approximation fine
ssi
$\forall$ voisinage Ω G-stable de
$B(\mathbb{R})$ dans $B(\mathbb{C})$ $\forall\, u : \Omega \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$
section holomorphe G-equivariant (i.e. $f \circ u = id_\Omega$, $\bar{\partial} u = 0$)

(*) $\forall\, m \in \mathbb{N}$ et $\forall\, p_1, \dots, p_m \in \Omega$
$\forall\, r \in \mathbb{N}$

il existe $s_n : B \longrightarrow \mathcal{X}$ section
algébrique t.q. $s_n(\mathbb{C})|_\Omega$ a les
mêmes r-jets au pts p_i que
u et $s_n(\mathbb{C})|_\Omega$ converge vers
u dans la topologia $C^\infty(\Omega, \mathcal{X}(\mathbb{C}))$

- $/\mathbb{R}$ in generale top. euclidienne
- autrement spécifié de Zariski

• $\underline{\underline{\Omega}}$  $B(\mathbb{R})$ } Explications DEFINIT.

$$\overline{\sigma}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{C})$$

Ω σ-stable $\Longleftrightarrow$ $\sigma_{\mathcal{X}}(\Omega) = \Omega$

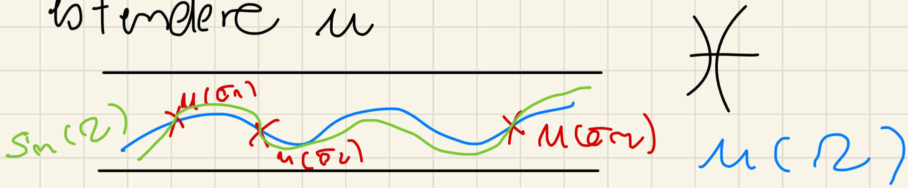
• $s_n : B \to \mathcal{X}$ section algébrique $\Longleftrightarrow$
$s_n(\mathbb{C}) : (B(\mathbb{C}), \overline{\sigma}_B) \longrightarrow (\mathcal{X}(\mathbb{C}), \overline{\sigma}_{\mathcal{X}})$
holomorphe (section de f : $f \circ s_n = id_B$)
(tutto compatto holo/alg)

• avoir le même r-jets au pt p $\Longleftrightarrow$
avoir le même "dérivé" jusqu'à r
dans les cartes locales de B et
$\mathcal{X}$ (classe d'équivalence, ne dépende
pas des cartes)

• les sections algébriques vont être dense
dans $C^\infty(\Omega, \mathcal{X}(\mathbb{C}))$

(*) va ajouter la birationalité

• a mene di perturbare in Ω poi passo estendere u



<u>Proposition</u> $f : \mathcal{X} \to B$ satisfait <u>tight</u> ssi $\forall$ K compact G-stable

t.q. $B(\mathbb{R}) \subset K \subset B(\mathbb{C})$

$\forall\, \Omega$ voisinage G-stable de K

$\forall\, u : \Omega \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ holo G-equivariante

$\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\forall\, p_1 \ldots p_m \in \Omega$

$\forall\, r \in \mathbb{N}$

il existe des sections alg. $s_n : B \to \mathcal{X}$ t.q. $j^r_{p_i} s_n = j^r_{p_i} u$

et $s_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{converge}} u$ uniformement (C^0-top.) sur K.

Uniform : les images se rapprochent

de plus en plus

Fcartes sur Ω cartes sur $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

$\| \underbrace{\text{difference}}_{\text{function et r dérivés}} \| \longrightarrow 0$

CAS HOLOMORPHE C^0 implique

C^∞ convergence :

$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{Sm/carte}_n} \mathbb{C}$ holo

$\Big\downarrow$ on se ramène du 1

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Cauchy Formule

nous dit $C^0 = C^\infty$

$$f_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{z-a} \, dz$$

lacet autour de a

$$f_n'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz$$

lacet

Si $f_n \to f$ uniform. f_n holo on applique Cauchy

$$\lim_n f_n'(a) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz$$

CONVER. UNIF.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lim_n \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz$$

CAUCHY $= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = f'(a)$

⋮

cela functionne pour $f \overset{\text{CAUCHY}}{\Longrightarrow}$ toutes dérivés, avec $C^0 \Leftrightarrow C^\infty$

Remark : • tight est interessante lorsque $\exists$ sections C^∞ $\nu : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$

• l'existence de $\gamma : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$ C^∞ est équivalent à l'existence d'une section $\omega : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$ C^∞ qui prend valeur dans le lieu où f est une submersion

• $\nu : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$ C^∞ prend valeur dans le lieu où f est une submersion

$$f \circ \gamma = id \rightsquigarrow df \circ d\nu = id$$

$$\neq 0$$

Proposition : $f : \mathcal{X} \to B$ vérifiant tight. Soit $\nu : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$ C^∞ section. Alors $\exists\ s_n : B \to \mathcal{X}$

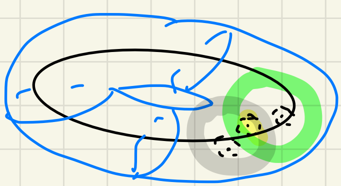
sections algébriques t.q.

$S_n(\mathbb{R}) : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$
converge à γ dans $C^\infty(B(\mathbb{R}), \mathcal{X}(\mathbb{R}))$

(+ conditions sur les jets)

Preuve : TH APROXIMAXIONS DE WHITNEY
= TAW

Par TAW (généralisation Weierstrass)
on trouve $\gamma_n : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R})$
analytique réelle t.q. $\gamma_n \to \gamma$
dans $C^\infty(B(\mathbb{R}), \mathcal{X}(\mathbb{R}))$
(+ Jets)



Non è detto che γ_n siano
sezioni. Sono solo appl. xé

$f \circ \gamma_n \xrightarrow{\text{converge}} id \implies f \circ \nu_n$ est

un <u>difféo</u> pour $n \gg 0$

$$\tilde{\nu}_n = \nu_n \circ (\underbrace{f \circ \nu_n}_{\substack{\text{difféo} \\ \text{pour } n \gg 0}})^{-1}$$

et mntn on a des sections analytiques de $f(\mathbb{R}) : \mathcal{X}(\mathbb{R}) \to B(\mathbb{R})$ les $\tilde{\nu}_n$

On peut les étendre à une <u>section holomorphe</u>, $u_n : \Omega_n \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$

G-équivari. Chaque u_n est approx. par sections alg. par tight + argument tight.

On veut prouver que

$\forall \mathcal{N} \subseteq C^\infty(B(\mathbb{R}), \mathcal{X}(\mathbb{R}))$

voisinage de ν on peut trouver

une section de la forme $s(\mathbb{R})$ où $s : B \to \mathcal{X}$ section algébrique. Or, dans $\mathcal{N}$ on a construit $\tilde{\nu}_n = u_n|_{B(\mathbb{R})}$

Par tight on a une section algébrique $s : B \to \mathcal{X}$ proche de u_n dans $C^\infty(\Omega_n, \mathcal{X}(\mathbb{C}))$ donc $s(\mathbb{R})$ est proche de $\hat{\nu}_n$ $(B(\mathbb{R}) \subset \Omega_n)$ $\blacksquare$

Conséquences et cas particuliers :

- CAS fibration triviale :
  $X \times B \to B$. Une section de cette famille est un morphism $B \to X$. Si on combine avec la proposition précédente on a que

$\forall$ fixé $\nu : B(\mathbb{R}) \to X(\mathbb{R})$
peut être approximé par
des morphismes algébriques (+ jets)

Propriété ↗ considérée par Kucharz Bochnak
qui ils appellent Propriété (X).

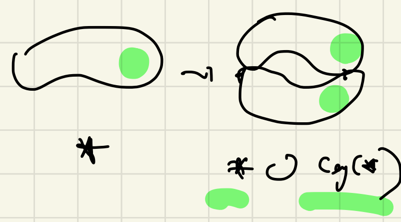
(inv. birat mais pas pour fibrations)

Rk : • $B(\mathbb{R}) = \emptyset$ $\quad \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

• Cas $\mathbb{C}$X : on oublie G et $\mathbb{R}$, alors on a une propriété d'approx. sur $\mathbb{C}$.

• $\mathcal{H} \to B$ sur $\mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Snc}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Snc}(\mathbb{R})$

↳ devient feuille sur $\mathbb{R}$



$\mathrm{Snc}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Snc}(\mathbb{R})$

Approximation faible

$f : \mathcal{X} \to B$ famille f satisfait la propriété d'<u>approximation faible</u> si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall p_1 .. p_n \in B$ $\forall r \in \mathbb{N}$ et $\forall$ germs de sections holomorph $s_i : U_i \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ G-équiv.

voisinage analytique U p_i

(si p_i reelle $\to$ s_i reelle
si p_i cx, il y a aussi $\overline{p_i}$
alors s_i et $\overline{s_i}$ sont une la conj. de l'autre)

Il existe $s : B \to \mathcal{X}$ algébrique t.q. $j^r_{p_i} s = j^r_{p_i} s_i \ \forall i$

(propriété d'interpolation)

<u>Example</u> : $\mathcal{X} := X \times B \to B$

une section est un morphism $B \to X$

si on fixe pts on X et ordre de tg, $\exists$? $\varphi : B \to X$ t.q. $\varphi(B)$ passant pour ~~ces~~ pts avec ces tg.

<u>Equiv</u> : $F = \mathbb{R}(B)$ funct. réelles rat. sur B

X/F. On a $X(F) \overset{i}{\hookrightarrow}$ incl. diagonal $\prod_{b \in B} X(F_b)$

$b \in B$ pt fermé

$\underbrace{\text{SUBTILITÉ TOPOLOGIE}}$

$$\boxed{\text{si } i(X(F)) \text{ dense alors } X \text{ vérifie l'approx faible}}$$

pt $X(F) \longleftrightarrow$ sections $B \longrightarrow \mathcal{X}$

pt $\prod(X(F_b)) \longleftrightarrow$ developpement

Obstruction de réciprocité

$f : \mathcal{X} \longrightarrow B$ $\qquad X = \mathcal{X}_\eta$ $\qquad X(F$

η PT GÉNÉRIQUE

on regarde les germes

de fonctions qui viennent de sections C^∞

Soit (H') $\subset \prod_b \mathcal{X}_\eta(F_b)$ le sous-ensemble de $(V_b) \in \prod_b \mathcal{X}_\eta(F_b)$

dont la projection sur

$\prod_{b \in B(\mathbb{R})} \mathcal{X}_\eta(F_b)$ est induite par

$\nu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R})$

On dit que l'obstruction de réciprocité est l'unique obstruction à la validité de l'approximation faible si l'image de i est dense dans (H')

(l'obstruction est donnée par la non existence de (beaucoup) sections C^∞ si on veut passer de (H) à tout)

(H)   LISTE sections C^∞] (H)   LISTE section alg.] $i \; (X(F))$

On dit qu'il n'y a pas des obstructions de réciprocité si $\textcircled{H1}$ est dense dans $\prod_{b \in B} X_\eta(F_b)$

(corr. tutto ok al nostro pb. algebrico)

<u>Proposition</u> : $f : \mathcal{X} \to B$ vérifie tight alors l'obstruction de réciprocité est l'unique obstruction à la validité de l'approximation faible.

il nous faut l'existence de sections C^∞

<u>APROX FAIBLE</u> :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d] \\ B \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{X}_\eta$ fibre générique une variété rationnellement connexe

$B / \mathbb{C}$

<u>example</u> : $X \times B \to B$ (X rat. connexe)

(Par 2 pt il passe l'image holomorphe d'un $\mathbb{P}^1$
= def notion connexe)

- en générale ils doivent pas être sur des fibres singulières.